Vấn đề: Khảo sát sự phát sóng hài bậc hai

Quy ước: những phần chữ xanh là phần dẫn nhập để giúp chúng ta hiểu vấn đề, các vectơ đôi khi được viết dấu muỗi tên ở phía trên nhưng đôi khi lại được biểu diễn bằng các kí tự in đậm, dấu "~" ở phía trên một đại lượng nào đó có nghĩa là đại lượng đó được biểu diễn dưới dạng số phức.

Giải quyết vấn đề:

Sóng hài là một sóng mà tần số của nó bằng một số nguyên lần tần số cơ bản nào đó. Sóng có tần số cơ bản chính là sóng đầu vào (hay tín hiệu). Ví dụ: nếu một tín hiệu có tần số cơ bản là f thì sóng hài bậc hai có tần số là $2f$, sóng hài bậc ba có tần số là $3f$, v.v…

Hầu như tất cả các sóng đều chứa năng lượng tại các tần số hài, cùng với năng lượng tại tần số cơ bản. Nếu tất cả năng lượng của sóng chỉ tập trung ở tần số cơ bản thì sóng đó được gọi là sóng điều hòa hoàn hảo (chẳng hạn như sóng hình sin).

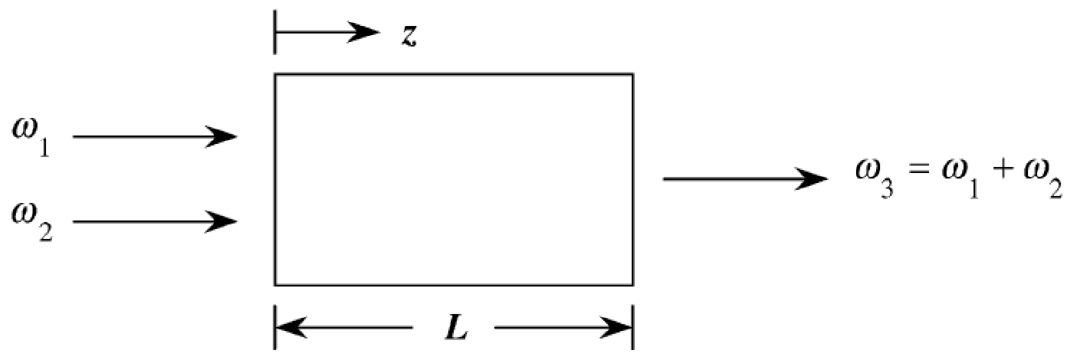
Sự phát sóng hài bậc hai trong quang phi tuyến là hiện tượng mà trong đó khi ta chiếu một sóng đầu vào có tần số ω vào một môi trường phi tuyến thích hợp thì cùng với sóng có tần số ω, trong môi trường phi tuyến ấy còn xuất hiện sóng hài có tần số 2ω. Trong những điều kiện thích hợp, sóng này mới có thể tái bức xạ và xuất hiện ở đầu ra.

Khi khảo sát sóng hài bậc hai, hai vấn đề mà chúng ta quan tâm nhất là: **1)Công suất P của sóng hài ở đầu ra có liên hệ như thế nào với các thông số nội tại của môi trường phi tuyến như chiều dài *L*, chiết suất *n*, v.v..? 2)Trong những điều kiện nào thì năng lượng của bức xạ tới được chuyển thành năng lượng của bức xạ đầu ra một cách hiệu quả nhất?**

Đối với câu hỏi thứ nhất, để tìm được công suất đầu ra, chúng ta phải tìm được điện trường đầu ra. Mà muốn tìm được điện trường đầu ra chúng ta phải giải phương trình truyền sóng trong môi trường phi tuyến đang xét. Đó chính là phương trình vi phân theo E. Trong phương trình này, có một số hạng nữa cần phải được tính toán là vectơ phân cực phi tuyến $\boldsymbol{P}_{nl}$. Khi tính toán, ta thấy nó phụ thuộc vào $\boldsymbol{E}$.

Đối với câu hỏi thứ hai, chúng ta cần khảo sát điều kiện đồng bộ về không gian của các sóng đầu vào và đầu ra.

Một điều mà chúng ta dễ dàng nhận thấy ở đây là, sự phát sóng hài bậc hai thật ra là một trường hợp riêng của một trường hợp tổng quát hơn: sự tạo dao động tần số tổng. Đó là hiện tượng phát sinh tần số bằng tổng của hai tần số đầu vào trong môi trường phi tuyến. Ở đây hai tần số đầu vào khác nhau về độ lớn. Vì vậy, để những kết quả khảo sát có thể sử dụng về sau này, thay vì khảo sát sóng hài bậc hai, chúng ta sẽ khảo sát sự tạo dao động tần số tổng. Những kết quả khảo sát này có thể áp dụng được cho trường hợp phát sóng hài bậc hai bằng cách cho các tần số đầu vào bằng nhau $(\omega_1 = \omega_2)$***.***



HÌNH| Sự tạo dao động tần số tổng

Tóm lại, các bước để giải quyết vấn đề là như sau:

1. Tìm vectơ phân cực P của môi trường phi tuyến.
2. Thành lập phương trình truyền sóng điện từ trong môi trường phi tuyến
3. Giải phương trình truyền sóng để tìm E trong sự tạo dao động tần số tổng
4. Khảo sát sự tạo sóng hài bậc hai như một trường hợp riêng của sự tạo dao động tần số tổng
5. Khảo sát điều kiện hợp pha.

1. **Vectơ phân cực P_{nl} của môi trường phi tuyến:**

Theo định nghĩa, vectơ phân cực là một đại lượng bằng tổng momen điện của các phân tử (hay nguyên tử) có trong một đơn vị thể tích của môi trường (điện môi).

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}{\Delta V}$$

Nếu các momen lưỡng cực điện của phân tử (nguyên tử) $\boldsymbol{p}_i$ đều bằng nhau, tức là các phân tử hoặc nguyên tử đều bị phân cực như nhau dưới tác động của trường ngoài thì:

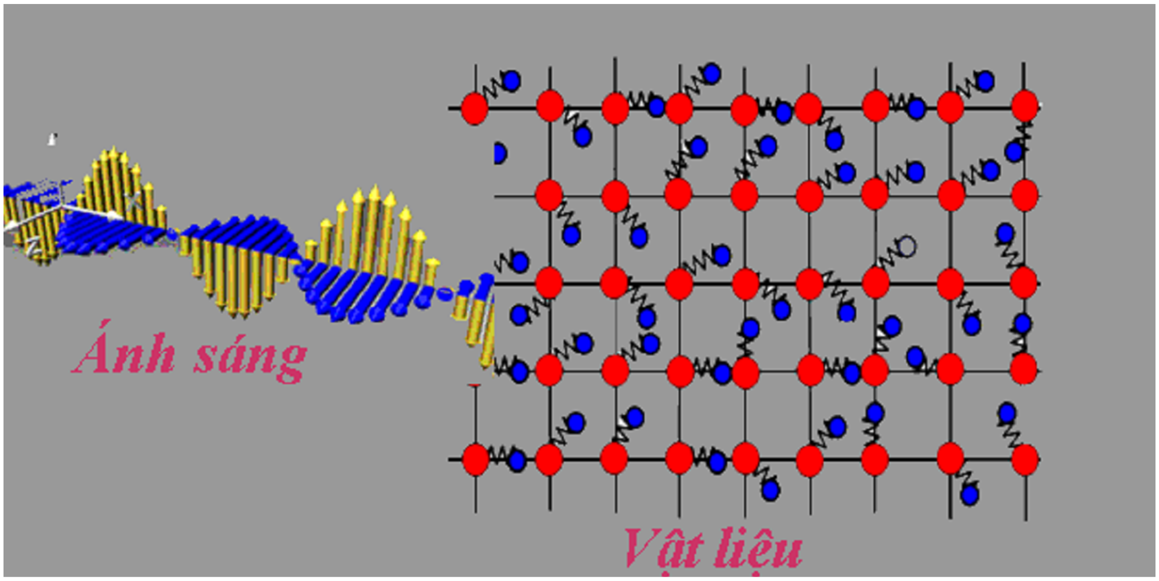
$$\vec{P} = \frac{n\vec{p}}{\Delta V} = N\vec{p}$$

ở đây N là mật độ nguyên tử hay phân tử trên một đơn vị thể tích.

Để cho đơn giản, chúng ta sẽ xét trường hợp nguyên tử một electron và trong không gian một chiều:

$P=Np=Nex(t)$

ở đây $x(t)$ là sự thay đổi vị trí tương đối của electron và hạt nhân theo thời gian.



Trước khi tính toán *x(t)*, chúng ta hãy điểm qua một vài nét về lịch sử của quá trình nghiên cứu sự tương tác giữa nguyên tử và trường (lí thuyết trường). Vào cuối thế kỉ thứ 19, lúc đó cơ học lượng tử chưa ra đời, khi mô tả tương tác giữa nguyên tử và trường Lorentz đã đưa ra mô hình như sau: Xem nguyên tử như một vật nặng (hạt nhân) gắn với một vật khác nhỏ hơn (electron) bằng một lò xo. Lò xo sẽ co giãn do tương tác của trường điện bên ngoài với điện tích của electron và hạt nhân. Lorentz không chỉ ra vị trí cụ thể của lò xo gắn electron hạt nhân, tuy nhiên ông giả thuyết rằng lực tương tác giữa chúng là lực đàn hồi tuân theo định luật Hooke: $F(x)=-kx$. Ở đây x là độ dịch chuyển vị trí tính từ điểm cân bằng. Nếu theo mô hình này thì x là hàm điều hòa theo thời gian. Tuy nhiên, trong mô hình hiện nay, thế năng của electron trong trường hạt nhân có dạng $V(x) = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{\beta x^3}{3} + ...$, nên lực tương tác giữa electron và hạt nhân sẽ là $F = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -kx - \beta x^2 - .....$. Như vậy, mô hình Lorentz chính là mô hình gần đúng của mô hình hiện đại trong đó đã bỏ qua các số hạng bậc cao trong biểu thức tính thế năng tương tác giữa electron và hạt nhân. Với mô hình hiện đại, *x(t)* không phải là hàm điều hòa theo thời gian. Vì thế, mô hình hiện đại này gọi là mô hình dao động tử phi điều hòa.

Bây giờ hãy xét một mô hình trong đó gồm có một tập hợp *N* dao động tử phi điều hòa trên một đơn vị thể tích. Mỗi dao động tử về mặt vật lí là một electron liên kết với hạt nhân. Nghĩa là, chúng ta đang xét mô hình nguyên tử có một electron và chúng ta sẽ hiệu chỉnh dần mô hình này cho phù hợp với thực tế.

Electron sẽ chịu tác dụng của các lực sau:

1. Lực tác động của trường lên điện tử $F_{trường}=e\tilde{E}$. Nếu trường đặt vào có tần số ω thì có thể biểu diễn nó dưới dạng $\tilde{E} = E^{(\omega)}\dfrac{(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}{2}$.(<u>một đại lượng có dấu “~” trên đầu nghĩa là đại lượng đó là đại lượng phức</u>)
2. Lực tác động của hạt nhân lên điện tử $F_{hat\_nhân}=-kx-\beta x^2+.....$
3. Lực đặc trưng cho sự tắt dần $F_{tat\_dan} = -m\delta \dfrac{dx}{dt}$, ở đây δ là hệ số tắt dần

Phương trình chuyển động của điện tử: $F_{tong\_hop}=ma$

Không cần phải viết phương trình dưới dạng vectơ vì chúng ta đang xét trường hợp một chiều.

$$F_{trường}+F_{hạt\_nhân}+F_{tat\_dan}=ma$$

$$\Leftrightarrow e\tilde{E}-kx-\beta x^2-m\delta\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+m\delta\frac{dx}{dt}+kx+\beta x^2=eE^{(\omega)}\frac{(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})}{2}$$

Chia cả hai vế cho m, ta được:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x+\frac{\beta}{m}x^2=\frac{eE^{(\omega)}}{2m}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\ (1)$$

Như đã biết $k/m=\omega_0^2$. Ta đặt $\beta/m=D$

(1) trở thành:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x+Dx^2=\frac{eE^{(\omega)}}{2m}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\ (2)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng (xem Trần Tuấn, trang 54 & 55):

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(q_1e^{i\omega t}+q_2e^{2i\omega t}+K_C\right) \quad (3.1.9)$$

Trong đó:

$$K_C=q_1^*e^{-i\omega t}+q_2^*e^{-2i\omega t}$$

$$q_1=\frac{eE^{(\omega)}}{m}\cdot\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\omega\delta} \quad (3.1.11)$$

$$q_2=\frac{-De^2\left[E^{(\omega)}\right]^2}{2m^2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\omega\delta\right]^2\left(\omega_0^2-4\omega^2+2i\omega\delta\right)} \quad (3.1.13)$$

Độ phân cực $\tilde{P}$ sẽ là:

$$\tilde{P}=Ne\,x(t)=\tilde{P}^{(\omega)}(t)+\tilde{P}^{(2\omega)}(t), \quad (3.1.14)$$

ở đó $\tilde{P}^{(\omega)}(t)=\frac{Ne}{2}\left(q_1e^{i\omega t}+Kc\right)=\frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\chi(\omega)E^{(\omega)}e^{i\omega t}+Kc\right\}$ (3.1.14a)

và $\tilde{P}^{(2\omega)}(t)=\frac{Ne}{2}\left(q_2e^{2i\omega t}+Kc\right)=\frac{1}{2}\left\{d^{(2\omega)}\left[E^{(\omega)}\right]^2e^{2i\omega t}+Kc\right\}$

(3.1.14b)

Ta đã kí hiệu:

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\omega\delta\right]} \qquad (3.1.15)$$

$$d^{(2\omega)} = \frac{-DNe^3}{2m^2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\omega\delta\right]^2\left(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\delta\right)} \qquad (3.1.16)$$

$$= \frac{mD\left[\chi(\omega)\right]^2 \chi(2\omega)\,\varepsilon_0^3}{2N^2e^3} \qquad (3.1.19)$$

Dùng (3.1.15)

$\chi(\omega)$ là độ điện cảm tuyến tính.

$d^{(2\omega)}$ là hệ số quang phi tuyến.

Trong (3.1.14b), nếu chúng ta kí hiệu biên độ phức $P^{(2\omega)} = d^{(2\omega)}.E^{(\omega)}.E^{(\omega)}$ (3.1.18), thì có thể viết lại (3.1.14b) dưới dạng:

$$\tilde{P}^{(2\omega)}(t) = \frac{1}{2}\left\{P^{(2\omega)}e^{i2\omega t} + K_C\right\} \qquad (3.1.17)$$

Biểu thức (3.1.18) được suy ra trong trường hợp một chiều. Trong thực tế, biên độ phức của độ phân cực điều hòa bậc hai theo hướng x liên hệ với điện trường tần số ω là:

$$P_x^{(2\omega)} = d_{xxx}^{(2\omega)} E_x^{(\omega)} E_x^{(\omega)} + d_{xyy}^{(2\omega)} E_y^{(\omega)} E_y^{(\omega)} + d_{xzz}^{(2\omega)} E_z^{(\omega)} E_z^{(\omega)} + 2d_{xzy}^{(2\omega)} E_z^{(\omega)} E_y^{(\omega)} + 2d_{xzx}^{(2\omega)} E_z^{(\omega)} E_x^{(\omega)} + 2d_{xxy}^{(2\omega)} E_z^{(\omega)} E_y^{(\omega)} \qquad (3.1.20)$$

Các thành phần $P_y^{(2\omega)}$ và $P_z^{(2\omega)}$ cũng có biểu thức tương tự trên.

Biểu thức (3.1.20) có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$P_i^{(2\omega)} = \sum_{ijk=xyz} d_{ijk}^{(2\omega)} E_j^{(\omega)} E_k^{(\omega)} \qquad (3.1.20a)$$

2. Thành lập phương trình truyền sóng điện từ trong môi trường phi tuyến:

Chúng ta bắt đầu từ các phương trình Maxwell:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho}, \tag{2.1.1}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{2.1.3}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}}. \tag{2.1.4}$$

Giả sử chúng ta xét môi trường không có các điện tích liên kết nhưng có các điện tích tự do, tức là $\tilde{\rho} = 0$ nhưng $\tilde{\vec{J}} \neq 0$; môi trường này là phi từ tính: $\tilde{\vec{B}} = \mu_0 \tilde{\vec{H}}$ **(2.1.7).**

Tuy nhiên, chúng ta cho phép vật liệu là phi tuyến theo nghĩa là các trường $\tilde{\vec{D}}$ và $\tilde{\vec{E}}$ liên hệ với nhau qua hệ thức:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{P}}, \tag{2.1.8}$$

ở đây nói chung vectơ phân cực $\tilde{\vec{P}}$ phụ thuộc phi tuyến vào giá trị cục bộ của cường độ điện trường $\tilde{\vec{E}}$.

Chúng ta lấy rot hai vế của phương trình (2.1.3), hoán đổi đạo hàm không gian và thời gian ở vế phải của phương trình thu được và dùng phương trình (2.1.4) và (2.1.7) để thay $\nabla \times \tilde{\vec{B}}$ bằng $\mu_0 (\partial \tilde{\vec{D}} / \partial t) + \mu_0 \tilde{\vec{J}}$, cuối cùng thu được phương trình:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\mathbf{D}} + \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}}{\partial t} = 0. \tag{2.1.9a}$$

Chúng ta dùng (2.1.8) để khử $\tilde{\vec{D}}$ từ phương trình này, và do đó chúng ta thu được biểu thức

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\mathbf{E}} + \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2}. \tag{2.1.9b}$$

Dùng hệ thức vecto: $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$

$\nabla . \vec{D} = \nabla . (\varepsilon_0 \varepsilon \ \vec{E}) = \rho = 0$ <=> $\nabla . \vec{E} = 0$ và $\tilde{\vec{J}} = \sigma \ \tilde{\vec{E}}$ (định luật Ohm dạng vi phân), ở đây ε là hằng số điện môi tỉ đối, σ là độ dẫn điện.

Phương trình (2.1.9b) được viết lại là:

$$-\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\mathbf{E}}+\mu_0\sigma\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2}. \quad (2.1.9b)$$

Độ phân cực $\tilde{\tilde{P}}$ có thể phân tích thành hai thành phần tuyến tính và phi tuyến:

$$\tilde{\mathbf{P}}=\epsilon_0\chi\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{NL}}.$$

Khi đó phương trình (2.1.9b) trở thành:

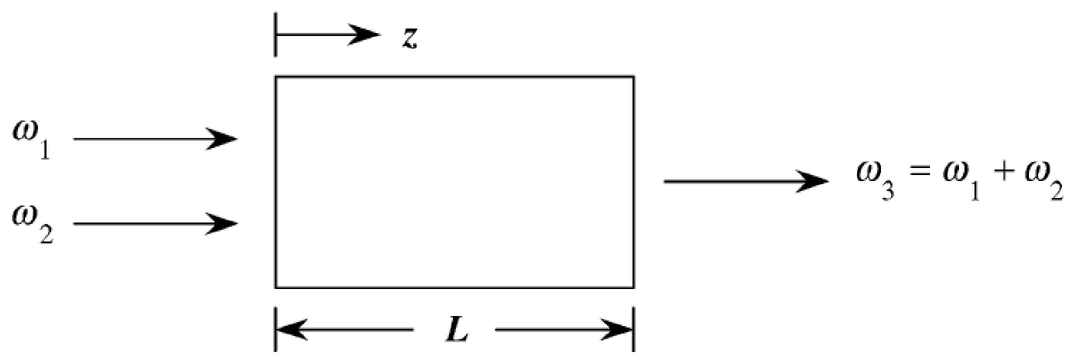
$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}=\mu_0\sigma\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}+\mu_0\epsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{nl}}}{\partial t^2}. \quad (2.1.10)$$

Đặt $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi)$, phương trình (2.1.10) có dạng:

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}=\mu_0\sigma\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{nl}}}{\partial t^2}. \quad (2.1.11)$$

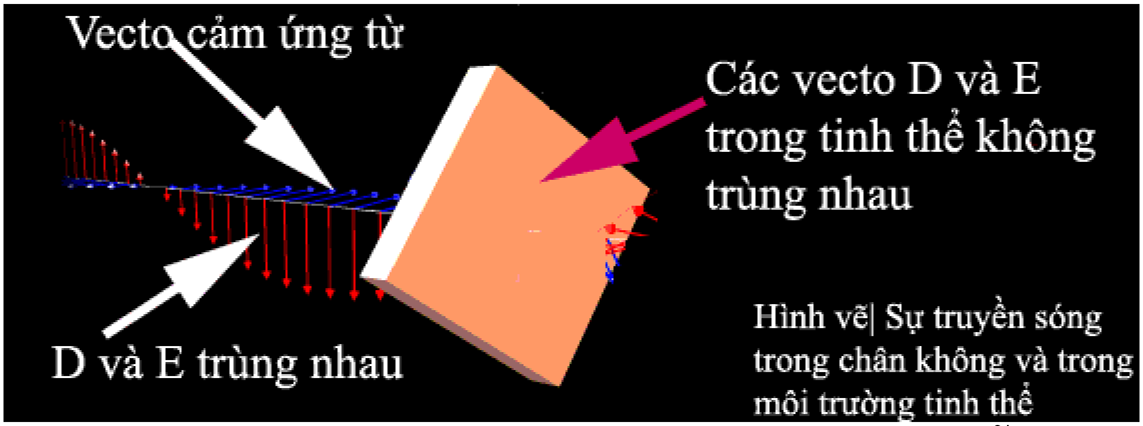
3. Giải phương trình truyền sóng để tìm *E* trong sự tạo dao động tần số tổng:

Trong sự tạo dao động tần số tổng, chúng ta xét 3 sóng có tần số $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Trong đó ω_1, ω_2 là các sóng đầu vào, ω_3 là tần số đầu ra, $\omega_3=\omega_1+\omega_2$.



HÌNH| Sự tạo dao động tần số tổng

Xét sóng là sóng phẳng và truyền theo trục z. Như vậy, thành phần theo trục z của vectơ cảm ứng điện sẽ bằng 0, $\tilde{D}_z$ =0, các thành phần còn lại của vectơ cảm ứng điện phụ thuộc vào z.



Hình vẽ| Sự truyền sóng trong chân không và trong môi trường tinh thể

Nói chung, trong môi trường phi tuyến, hướng của vectơ cảm ứng điện $\tilde{\vec{D}}$ và vectơ cường độ điện trường $\tilde{\vec{E}}$ không trùng nhau. Nghĩa là dù cho $\tilde{D}_z$ bằng không nhưng $\tilde{\vec{E}}_z$ vẫn khác không. Và từng thành phần của vectơ cường độ điện trường không chỉ phụ thuộc z mà phụ thuộc vào cả x,y,z. Tuy nhiên, để cho đơn giản, chúng ta sẽ xét các sóng phân cực thẳng và truyền theo trục quang học của tinh thể, lúc đó $\tilde{\vec{D}}$ và $\tilde{\vec{E}}$ trùng nhau. Vì $\tilde{\vec{D}}$ và $\tilde{\vec{E}}$ trùng nhau nên các thành phần của $\tilde{\vec{E}}$ cũng phụ thuộc z; ngoài ra các đạo hàm theo biến tọa độ x, y đều bằng 0: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Sau đó, chúng ta sẽ hiệu chỉnh dần mô hình này cho các trường hợp tổng quát hơn.

Các sóng đầu vào và đầu ra được kí hiệu như sau:

$$\widetilde{E}_i^{(\omega_1)}(z,t) = \frac{1}{2}\left\{E_{1i}(z)\,e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + K_C\right\} \tag{3.2.6}$$

$$\widetilde{E}_k^{(\omega_2)}(z,t) = \frac{1}{2}\left\{E_{2k}(z)\,e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + K_C\right\}$$

$$\widetilde{E}_j^{(\omega_3)}(z,t) = \frac{1}{2}\left\{E_{3j}(z)\,e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + K_C\right\}$$

Xét những tinh thể mà biên độ của độ phân cực phi tuyến P_{nl} và biên độ của các sóng thành phần E (thành phần không phụ thuộc vào tần số) liên hệ với nhau qua hệ thức (chẳng hạn KDP): $(P_{nl})_i=2d_{ijk}E_j E_k$ [3.2.3](chúng ta đang xét trường hợp một chiều), ở đây i có thể là x, hoặc y; j có thể là x hoặc y; tương tự, k có thể là x hoặc y;

Dùng (3.2.6) để viết biểu thức cho thành phần thứ i của độ phân cực phi tuyến với tần số ω_1 dưới dạng giống như trong (3.1.17):

$$[\widetilde{P}_{nl}^{(\omega_1)}(z,t)]_i = \frac{1}{2}\left\{[P_{nl}^{(\omega_1)}]_i e^{i\omega_1 t} + K_C\right\} = \frac{1}{2}\left\{[2d_{ijk}.E_{3j}.E_{2k}.e^{-(k_3+k_2)z}]e^{i\omega_1 t} + K_C\right\} \quad \textbf{(3.2.7)}$$

$$= d_{ijk}E_{3j}E_{2k}e^{i[(\omega_3-\omega_2)t-(k_3+k_2)z]} + K_C$$

Bây giờ, hãy giải phương trình sóng (2.1.11) để tìm các thành phần của cường độ điện trường phức ở tần số ω_1. Tính toán số hạng đầu ở vế trái, ta được:

$$\nabla^2 \widetilde{E}_i^{(\omega_1)}(z,t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \widetilde{E}_i^{(\omega_1)}(z,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{E_{1i}(z)\, e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + K_C\right\} \quad (3.2.8)$$

Giả thiết biên độ phức của trường biến đổi đủ chậm theo trục z sao cho:

$$\frac{dE_{1i}}{dz} \ll k_1 E_{1i} \qquad \text{hay}$$

$$\frac{d^2E_{1i}}{dz^2} \ll k_1 \frac{dE_{1i}}{dz}$$

thì ta có:

$$\nabla^2 \widetilde{E}_i^{(\omega_1)}(z,t) = -\frac{1}{2}\left\{k_1^2 E_{1i}(z) + 2i\, k_1 \frac{dE_{1i}(z)}{dz}\right\} e^{\,i(\omega_1 t - k_1 z)} + K_C \quad (3.2.9)$$

Dễ dàng nhận được biểu thức tương tự trên đối với $\nabla^2\widetilde{E}_j^{(\omega_3)}(z,t)$ và $\nabla^2\widetilde{E}_k^{(\omega_2)}(z,t)$. Đưa (3.2.9) vào (2.1.11) có thể viết phương trình sóng đối với $E_i^{(\omega)}(z,t)$.

$$\left(\frac{k_1^2}{2}E_{1i} + ik_1\frac{dE_{1i}}{dz}\right)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + K_C =$$

$$\left(-i\omega_1\mu_0\sigma + \omega_1^2\mu_0\varepsilon\right)\left[\frac{E_{1i}}{2}e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + K_C - \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\widetilde{P}_{nl}^{(\omega_1)}(z,t)\right]\right] \tag{3.2.10}$$

ở đó: $\dfrac{\partial}{\partial t} = i\omega$.

Đưa (3.2.7) vào (3.2.10) và chú ý rằng $\omega_1^2\mu_0\varepsilon_0 = k_1^2$, ta có

$$ik_1\frac{dE_{1i}}{dz}e^{-ik_1z} = -\frac{i\omega_1\sigma\mu_0}{2}E_{1i}\,e^{-ik_1z} +$$

$$+\mu_0\omega_1^2 d_{ijk}E_{2j}E_{2k}\,e^{-i(k_3+k_2)z} \tag{3.2.11}$$

xem σ phụ thuộc vào tần số

$$\frac{dE_{1i}}{dz} = -\frac{\sigma_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}E_{1i} - i\omega_1\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,d_{ijk}\,E_{3j}\,E_{2k}\,e^{-i(k_3+k_2-k_1)} \tag{3.1.11a}$$

Các biên độ E_{2k} và E_{3j} cũng có phương trình tương tự trên:

$$\frac{dE_{2k}}{dz} = -\frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}E_{2k} + i\omega_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,d_{kij}\,E_{1i}E_{3j}\,e^{-i(k_1+k_2-k_3)} \tag{3.1.11b}$$

$$\frac{dE_{3j}}{dz} = -\frac{\sigma_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}E_{3j} - i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,d_{jik}\,E_{1i}\,E_{2k}\,e^{-i(k_1+k_2-k_3)} \tag{3.1.11c}$$

Những kết quả trên là kết quả của việc khảo sát sự tạo dao động tần số tổng. Chúng ta sẽ dùng nó để khảo sát sự phát sóng hài bậc hai ở mục tiếp theo đây.

Nếu $\sigma_3 = 0$, tức là môi trường trong suốt đối với tần số ω_3, thì từ (3.1.11c) suy ra:

$$\frac{dE_{3j}}{dz} = -i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,d'_{jik}\,E_{1i}\,E_{2k}\,e^{i\Delta kz}$$

$$dE_{3j} = -i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,d'_{jik}\,E_{1i}\,E_{2k}\,e^{i\Delta kz}\,dz$$

ở đó $\Delta k = k_3^{(j)} - k_1^{(i)} - k_2^{(k)}$; $k_1^{(i)}$ hằng số truyền của sóng có tần số ω_1 và phân cực theo trục i. Nếu $E_{3j}(0) = 0$ (sóng hài bậc hai ở lối vào bằng 0) và tinh thể có độ dài L, biên độ của truòng tần số tổng ở mặt phẳng ra của môi trường phi tuyến (tại L) là:

$$E_{3j}(L) = -i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,d'_{jik}\,E_{1i}\,E_{2k}\int_0^L e^{i\Delta kz}\,dz = -i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,d'_{jik}\,E_{1i}\,E_{2k}\left(\frac{e^{i\Delta kL}-1}{i\Delta k}\right).$$

4.Sự tạo sóng hài bậc hai như một trường hợp riêng của sự tạo dao động tần số tổng:

Tiếp theo, ta sẽ dùng các kết quả ở mục 3 để khảo sát sự phát sóng hài bậc hai ($\omega_1 = \omega_2$).

$$E_{3j}(L)E_{3j}^{*}(L) = \frac{\mu_0}{\varepsilon_3}\omega_3^2 d_{jk}'^2 L^2 E_{1i}E_{1i}^{*} E_{2k}E_{2k}^{*} \frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2} \quad (3.3.3)$$

Để nhận được biểu thức về công suất của sóng ở lối ra, ta dùng hệ thức:

$$\frac{P(\omega_\ell)}{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_\ell}{\mu_0}} E_{\ell j} E_{\ell j}^{*}$$

ở đó, $\varepsilon_\ell = \varepsilon_0 n_\ell^2$; S tiết diện ngang của chùm sáng. Đưa (3.3.3) vào biểu thức trên và lập tỉ số công suất đầu vào và đầu ra:

$$\frac{P^{(\omega_3)}}{P^{(\omega_1)}} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega_3^2 d_{jik}'^2 L^2}{n_1^2 n_3} \left(\frac{P^{(\omega_1)}}{S}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2} \quad (3.3.4)$$

5.Khảo sát điều kiện hợp pha:

Ta thấy ngay rằng, tỉ số trong biểu thức (3.3.4) sẽ cực đại, tức công suất sóng lối ra lớn nhất trong sự phát sóng hài bậc hai đạt được khi $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2} \to 1$, tức là khi

$\Delta k = 0 \Leftrightarrow k_3 = 2k_1$ (1)

Có thể tổng quát hóa kết quả trên cho sự tạo dao động tần số tổng:

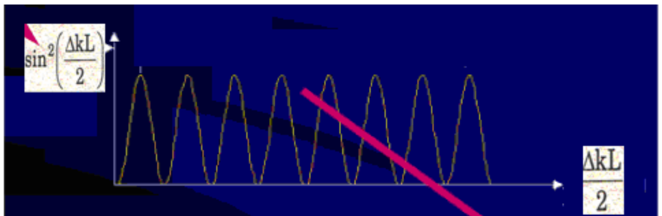
$k_3^{(j)} = k_1^{(i)} + k_2^{(k)}$ (2)

Các điều kiện (1) và (2) được gọi là *điều kiện đồng bộ về không gian của sự phát sóng hài bậc hai và sự tạo dao động tần số tổng (tương ứng).*

Đối với sự phát sóng hài bậc hai, khi điều kiện đồng bộ về không gian thõa mãn thì (3.3.4) sẽ trở thành:

$$\frac{P^{(\omega_3)}}{P^{(\omega_1)}} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega_3^2 d_{jik}^{'2}}{n^3}\left(\frac{P^{(\omega_1)}}{S}\right)L^2 \qquad (3.3.5)$$

Nghĩa là công suất lối ra của sóng hài bậc hai tỷ lệ với bình phương chiều dài của tinh thể.



$$\frac{P^{(\omega_3)}}{P^{(\omega_1)}} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega_3^2 d_{jik}^{'2} L^2}{n_1^2 n_3}\left(\frac{P^{(\omega_1)}}{S}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2} \qquad (3.3.4)$$

Chú ý: trong sách thầy Tuấn có chổ viết *P/S*. Đó chính là cường độ sóng. Theo định nghĩa, cường độ là công suất trên một đơn vị diện tích.

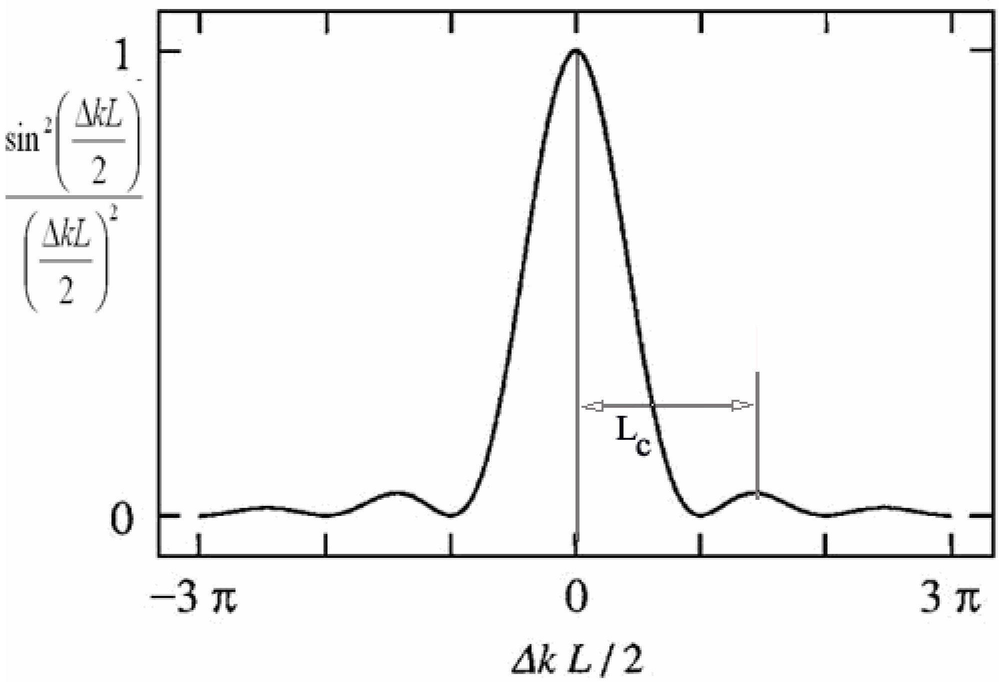
Giả sử công suất của sóng đầu vào là không đổi, ta hãy khảo sát công suất của sóng hài ở đầu ra $P^{(\omega_3)}$ theo công suất đầu vào $P^{(\omega_1)}$:

$$P^{(\omega_3)} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega_3^2 d_{ijk}^2 L^2}{n_1^2 n_3}\left[\frac{\left(P^{(\omega_1)}\right)^2}{S}\right]\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2} (3.3.4.1)$$

Đặt tích của các hằng số thành một hằng số duy nhất C, ta được:

$$P^{(\omega_3)} = C\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2} (3.3.4.2)$$

Đồ thị của hàm $\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2}$ có dạng như sau:



Nhìn trên đồ thị này ta thấy, khi $\Delta kL = 0$, tức điều kiện đồng bộ về không gian được thõa mãn thì công suất sóng hài ở lối ra có giá trị lớn nhất. Khi $\Delta kL \neq 0$, công suất lối ra giảm rất nhanh. Nó đi qua một loạt các điểm 0 và các cực đại phụ. Cực đại ứng với $\Delta kL = 0$ được gọi là cực đại chính. Hãy tính khoảng cách từ cực đại chính đến cực đại phụ thứ nhất L_c (Xem sách của thầy Tuấn, trang 67).